

Ableitung mit Hilfe der Definition.

Es seien $a \geq 0$ und

$$f_a(x) := \begin{cases} |x|^a \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{wenn } x \neq 0 \\ 0 & \text{wenn } x = 0 \end{cases}.$$

Zeigen Sie:

- a) f_a ist stetig in 0 für jedes $a > 0$, aber nicht für $a = 0$.
- b) f_a ist differenzierbar in 0 für jedes $a > 1$, aber nicht für $a \in (0; 1]$.
- c) f'_a ist stetig in 0 für $a > 2$, aber nicht für $a \in (1; 2]$
- d) Für $k \in \mathbb{N}, k > 1$ ist $f_a^{(k-1)}$ differenzierbar in 0 für jedes $a > k-1$, aber nicht für $a \in (k-2; k-1]$ und $f_a^{(k)}$ ist stetig in 0 für $a > k$, aber nicht für $a \in (k-1; k]$